Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.

Von LEOPOLD FEJÉR in Budapest.

Einleitung.

1. In einigen neuerdings veröffentlichten Arbeiten (FEJÉR **2**, **3**, **4**, und FEJÉR—SZEGŐ **5**) bin ich u. A. zum Ergebnis gelangt, daß Potenzreihen und trigonometrische Reihen mit *totalmonotoner*[1]) Koeffizientenfolge gewisse *Eigenschaften* haben, die auch dann noch bestehen bleiben, wenn die Ordnung der Monotonie der Koeffizientenfolge nicht unendlich[2]), sondern eine gewisse *endliche* ganze Zahl ist. Ist nun einmal das Resultat gewonnen, daß eine Eigenschaft für Reihen, deren Koeffizientenfolge k-fach monoton ist, feststeht, so wird man in jedem einzelnen Falle zur interessanten Frage geführt: welches ist der *kleinste* Wert der Monotonieordnung k der Koeffizientenfolge der Reihe, für den die betreffende Eigenschaft noch allgemein gültig bleibt. Um das soeben

---

[1]) Ist $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ eine unendliche Zahlenfolge, so lautet die zu ihr gehörige unendliche quadratische Matrix der Differenzen

$$\Delta^{(\nu)} c_n = c_n - \binom{\nu}{1} c_{n+1} + \binom{\nu}{2} c_{n+2} - \ldots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} c_{n+\nu},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

($\Delta^{(0)} c_n$ bedeutet c_n selbst). Ist nun $\Delta^{(\nu)} c_n \geqq 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$, so heißt die Folge $\{c_n\}$ *k-fach monoton*. Ist aber $\Delta^{(\nu)} c_n \geqq 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, so heißt die Folge $\{c_n\}$ *totalmonoton*, oder auch vollmonoton.

Der triviale Fall $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \ldots = 0$ sei immer ausgeschlossen.

[2]) Ist die Ordnung der Monotonie der Koeffizientenfolge unendlich, so sind die in Frage stehenden Sätze oft (aber nicht immer) geradezu evident auf Grund der sogleich zu nennenden, allerdings tiefliegenden Hausdorff—Stieltjesschen Darstellung von Potenzreihen mit totalmonotoner Koeffizientenfolge.

gesagte zu erläutern, führe ich zunächst einige Resultate an, die ich in meinen obenerwähnten Arbeiten bewiesen habe.

Satz I. *Ist in der Potenzreihe*

$$(1) \qquad f(z) = c_1 z + c_2 z^3 + c_3 z^5 + \ldots + c_n z^{2n-1} + \ldots$$

die Koeffizientenfolge $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ *dreifach monoton, so ist die Reihe für* $|z| < 1$ *konvergent und schlicht.*

Es gibt Potenzreihen vom Typus (1) *mit zweifach monotoner Koeffizientenfolge* $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$, *für welche* $f(z)$ *für* $|z| < 1$ *nicht schlicht ist.*[3]) (FEJÉR **2.**)

Etwas einfacher ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz II. *Ist in der Potenzreihe*

$$(2) \qquad f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

die Koeffizientenfolge $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ *vierfach monoton*[4]), *so ist die Reihe für* $|z| < 1$ *konvergent und schlicht.*

Es gibt Potenzreihen vom Typus (2), *deren Koeffizientenfolge einfach monoton ist und für welche* $f(z)$ *für* $|z| < 1$ *nicht schlicht ist.*[5]) (FEJÉR **2.**)

---

[3]) Eine solche Potenzreihe ist z. B.

$$f(z) = 2z + z^3;$$

hier ist die Koeffizientenfolge

$$2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$$

zweifach monoton und $f(z)$ ist für $|z| < 1$ nicht schlicht, weil $f'(z) = 2 + 3z^2$ für $|z| < 1$ verschwindet.

[4]) In der Arbeit von Herrn J. W. ALEXANDER (ALEXANDER **1**) findet man den Satz, daß $w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ für $|z| < 1$ schlicht ist, wenn die Folge $\{nc_n\}$ einfach monoton ist. Ich kann beweisen, daß das von $w = f(z)$ in der w-Ebene entworfene Bild schlicht und zugleich i. B. auf den Nullpunkt $w = 0$ sternförmig ist, wenn $\{nc_n\}$ zweifach monoton ist. (S. §. 3 vorliegender Arbeit.)

[5]) Z. B. ist in

$$f(z) = z + z^2 + \ldots + z^n$$

die Koeffizientenfolge

$$1,\ 1, \ldots, 1,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$$

einfach monoton und $f(z)$ ist (wenn $n \geqq 2$) nicht schlicht für $|z| < 1$, weil

$$f'(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}$$

$(n-1)$ Nullstellen hat, die im Einheitskreise $|z| < 1$ liegen. Übrigens ist auch

$$\varphi(z) = \frac{1 + z + z^2}{1 - az^3} = 1 + z + z^2 + az^3 + az^4 + az^5 + a^2 z^6 + \ldots$$

nicht schlicht für $|z| < 1$, wenn nur der positive Parameter a hinreichend klein ist. Tatsächlich ist

$$\varphi'(z) = \frac{(1 + 2z)(1 - az^3) + 3az^2(1 + z + z^2)}{(1 - az^3)^2}.$$

(Fortsetzung der Fussnote auf S. 91)

Über die Folge der Reste habe ich den folgenden Satz gefunden:

S a t z III. *Ist in der Potenzreihe*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{3}$$

die Koeffizientenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *dreifach monoton, so gilt im ganzen Einheitskreise*[6]) $|z| < 1$

$$|f(z)| = |R_0(z)| \geqq |R_1(z)| \geqq \ldots \geqq |R_n(z)| \geqq \ldots, \tag{4}$$

wo

$$R_n(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu. \tag{5}$$

Es gibt Potenzreihen (3) *mit einfach monotoner Koeffizientenfolge* $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, *für welche die unendliche Ungleichungskette* (4) *nicht gültig ist.*[7]) (FEJÉR **3** und FEJÉR—SZEGŐ **5.**)

Endlich sei noch ein Satz über die „Legendreschen Polynome" einer Potenzreihe angeführt:

Für $a = 0$ verschwindet $\varphi'(z)$ an der Stelle $z = -\frac{1}{2}$, folglich für hinreichend kleine positive Werte von a in der Umgebung von $z = -\frac{1}{2}$.

[6]) Daraus folgt für die Partialsummen $s_n(z)$ der Reihe (3) die Abschätzung

$$|s_n(z)| \leqq 2\,|f(z)|,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots; \quad |z| < 1.$$

Diese Abschätzung ist insofern beachtenswert, als $|s_n(z)|$ hier durch den Wert von $|f(z)|$ *an der Stelle z selbst* nach oben abgeschätzt wird (und *nicht* etwa durch das *Maximum* von $|f(z)|$ am Kreise $|z| =$ Const., der durch den Punkt z geht). Die Abschätzung $|s_n(z)| \leqq 2\,|f(z)|$ ist schon in der Arbeit FEJÉR **(2)** zu finden.

[7]) Z. B. ist in der Potenzreihe

$$f(z) = \frac{1+z}{1-az^2} = 1 + z + az^2 + az^3 + a^2z^4 + a^2z^5 + \ldots$$

die Koeffizientenfolge einfach monoton, wenn a eine feste positive Konstante < 1 bezeichnet, während der Quotient

$$\frac{R_{2\nu+1}(z)}{R_{2\nu}(z)} = z\,\frac{1+az}{1+z}$$

(der hier von ν unabhängig ist) dem absoluten Betrage nach größer ist als 1, wenn z in einem gewissen Teile des Einheitskreises $|z| < 1$ liegt. Ähnlicher Sachverhalt bei

$$\varphi(z) = \frac{1+z+z^2}{1-az^3} = 1 + z + z^2 + az^3 + az^4 + az^5 + \ldots.$$

Satz IV. *Ist in der Potenzreihe*

(6) $$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

die Koeffizientenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *totalmonoton und*

(7) $$|f(re^{i\theta})|^2 = P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)r+\ldots+P_n(\cos\theta)r^n+\ldots,$$

so sind die arithmetischen Mittel erster Ordnung der durch die „Legendreschen Polynome" $P_n(\cos\theta)$ *gebildeten unendlichen Reihe*

(8) $$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

für jedes reelle θ *nichtnegativ.* (FEJÉR 3.)

2. Wir sehen nun zunächst, daß im Satze I $k=3$ die kleinste Monotonieordnung ist, mit welcher der Satz noch allgemein gültig bleibt. Hingegen ist im Satze III nicht $k=3$, sondern $k=2$ die kleinste zulässige Monotonieordnung, ein Resultat, das von SZEGŐ herrührt (FEJÉR—SZEGŐ 5). Es ist mir nun neuerdings gelungen, auch im Satze IV die Monotonieordnung der Koeffizientenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ von $k=\infty$ auf $k=2$ herunterzudrücken; es ist also der folgende Satz gültig:

Ist $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *eine nichtnegative, monoton fallende, von unten konvexe Zahlenfolge und* $P_0(\cos\theta), P_1(\cos\theta), \ldots, P_n(\cos\theta), \ldots$ *die entsprechende unendliche Folge der „Legendreschen Polynome", so sind die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Partialsummen der unendlichen Reihe*

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

durchwegs nichtnegativ für jeden reellen Wert von θ.

Den äußerst einfachen Beweis dieses Satzes gebe ich im §. 5 vorliegender Arbeit.

Es ist mir nicht gelungen zu entscheiden, ob im Satze II die Monotonitätsordnung der Koeffizientenfolge $k=4$ durch eine kleinere ersetzt werden kann oder nicht.[8]) Indessen stieß ich doch auf verschiedene Resultate, von welchen ich einige, da ich sie in der Literatur nicht vorfinden konnte, in dieser Arbeit mitteilen möchte. Das folgende einfache Resultat bezieht sich auf den Fall, in welchem die Variable z nur *reelle* Werte annimmt (und deshalb jetzt mit x bezeichnet werde) und lautet folgendermaßen (s. §. 1):

---

[8]) Ist diese Ordnung $k=2$, so ist $f(z)$ „schlicht" auf dem *Durchmesser* von (-1) bis $(+1)$ und auf dem Durchmesser von $(-i)$ bis $(+i)$ des Einheitskreises. Dies folgt leicht aus dem Satze V vorliegender Arbeit.

Ist in der Potenzreihe

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

die Koeffizientenfolge $(k+1)$-fach monoton, so ist sie für $-1<x<1$ konvergent, und es ist

$$f(x)\geqq 0,\ f'(x)\geqq 0,\ f''(x)\geqq 0,\ldots,f^{(k)}(x)\geqq 0.$$

Diese Aussage ist für $0\leqq x<1$ natürlich trivial; sie ist nur für das Intervall $-1<x<0$ wesentlich.

§. 2 handelt über die Eigenschaften der transformierten Reihen, §. 3 über die Sternförmigkeit und Konvexität, §. 4 über die Eigenschaften der Restenfolge einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, für welche die Folge $\{c_n\}$ (oder $\{nc_n\}$, oder auch $\{n^2c_n\}$) eine gewisse Ordnung der Monotonie besitzt.

§. 1.

Über die Ableitungen im Intervalle $-1<x<1$ einer Potenzreihe mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.

1. Satz V. *Ist in der Potenzreihe*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

die Koeffizientenfolge $a_0, a_1,\ldots,a_n,\ldots$ $(k+1)$-fach monoton, so ist sie für $-1<x<1$ konvergent und es ist

$$f(x)\geqq 0,\ f'(x)\geqq 0,\ f''(x)\geqq 0,\ldots,f^{(k)}(x)\geqq 0$$

im ganzen Intervalle[9] $-1<x<1$.

---

[9]) Ist also in der Potenzreihe $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *totalmonoton*, so ist $f^{(k)}(x)\geqq 0$ für *jedes* nichtnegative ganzzahlige k gültig im Intervalle $-1<x<1$. *Dieser* Satz ist eine unmittelbare Folge der Stieltjes—Hausdorffschen Darstellung

$$f(x)=\int_0^1 \frac{d\varphi(t)}{1-tx},$$

aus welcher die Formel

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}=\int_0^1 \frac{t^k\,d\varphi(t)}{(1-tx)^{k+1}}$$

folgt, woraus wieder ersichtlich ist, daß (für das analytisch fortsetzbare $f(x)$) sogar im Intervalle $-\infty<x<1$ $f^{(k)}(x)\geqq 0$, $k=0,1,2,\ldots$, gültig ist. (Hier bezeichnet $\varphi(t)$ eine im Intervalle $0\leqq t\leqq 1$ definierte beschränkte, daselbst

2. Erster Beweis. Dieser stützt sich auf eine Eigenschaft der Partialsummen höherer Ordnung (oder iterierten Partialsummen) der geometrischen Reihe

$$(2) \qquad 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

die ich zunächst auseinandersetzen möchte.

In meinen Untersuchungen über Fouriersche Reihen und Potenzreihen kommt zumeist das Verhalten der Partialsummen höherer Ordnung der geometrischen Reihe (oder ihrer derivierten Reihen) *auf dem Einheitskreise* $|x|=1$ *der komplexen x-Ebene* in Betracht. Meine diesbezüglichen Resultate sind in den §§. II und III meiner Abhandlung Fejér 2 zusammengefaßt und werden in den folgenden Paragraphen vorliegender Arbeit auch ausgiebig benützt. Hier, im §. 1, sollen diese höheren Partialsummen (oder, was auf dasselbe hinauskommt: die höheren Cesàroschen Mittel) der geometrischen Reihe auf dem reellen Durchmesser $-1<x<1$ des Einheitskreises $|x|<1$ betrachtet werden.

Die höheren Partialsummen der geometrischen Reihe (2) seien, wie gewöhnlich, durch

$$(3) \qquad \begin{aligned} s_n^{(0)}(x) &= 1+x+\ldots+x^n \\ s_n^{(1)}(x) &= s_0^{(0)}(x)+s_1^{(0)}(x)+\ldots+s_n^{(0)}(x) \\ s_n^{(2)}(x) &= s_0^{(1)}(x)+s_1^{(1)}(x)+\ldots+s_n^{(1)}(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n^{(\nu)}(x) &= s_0^{(\nu-1)}(x)+s_1^{(\nu-1)}(x)+\ldots+s_n^{(\nu-1)}(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

definiert und bezeichnet. Da die erzeugende Funktion der geometrischen Reihe (2), wenn z die Variable der erzeugenden Funk-

---

niemals abnehmende Funktion von t mit $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)<\varphi(1)$). Aus der obigen Formel können wir noch entnehmen, daß die Folge $\left\{\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right\}$, $k=0,1,2,\ldots$, totalmonoton ist, wenn x eine beliebige, aber feste Stelle der negativen Achse $-\infty<x<0$ bezeichnet. Es gilt also der folgende Satz: Wenn für eine analytische Funktion an der regulären Stelle $x=0$ die Folge $\left\{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right\}$, $n=0,1,2,\ldots$, totalmonoton ist, so ist diese Folge auch für die negative Achse $-\infty<x<0$ (entlang welcher sie infolgedessen analytisch fortsetzbar ist) totalmonoton. Ich verweise hier auf die Note von G. Pólya (9), in welcher bemerkenswerte Eigenschaften von Potenzreihen mit totalmonotoner Koeffizientenfolge angegeben sind.

tion bezeichnet,

(4) $$\frac{1}{1-xz}=1+xz+x^2z^2+\ldots+x^nz^n+\ldots$$

lautet, so ist die erzeugende Funktion der Partialsummen ν-ter Ordnung $s_0^{(\nu)}(x)$, $s_1^{(\nu)}(x), \ldots$ der geometrischen Reihe

(5) $$\frac{1}{(1-z)^{\nu+1}}\,\frac{1}{1-xz}=\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\nu)}(x) z^n .$$

Indem wir nun auf beiden Seiten der Gleichung (5) den ν-ten Differentialquotienten nach x nehmen, erhalten wir

(6) $$\frac{\nu!\, z^\nu}{(1-z)^{\nu+1}\,(1-xz)^{\nu+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\nu)}(x)\,.\,z^n .$$

Da $\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\nu)}(x)$ für $n=0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$ natürlich identisch verschwindet, so erhalten wir aus (6), indem wir auf beiden Seiten durch z^ν dividieren:

(7) $$\frac{\nu!}{((1-z)(1-xz))^{\nu+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_{\nu+n}^{(\nu)}(x)\, z^n .$$

Es sei nun *erstens:* $0<x<1$. Da $(1-z)^{-1}$ nach z entwickelt durchwegs positive Koeffizienten besitzt und da dasselbe, wegen $0<x<1$, auch für $(1-xz)^{-1}$ gültig ist, so ergibt die Gleichung (7) zunächst das triviale Resultat $\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_{\nu+n}^{(\nu)}(x)>0$, für $n=0, 1, 2, 3, \ldots$. Es sei nun *zweitens* $-1<x<0$. Da $(1-z)(1-xz)=1-[(1+x)z-xz^2]$, und da hier die Koeffizienten von z und z^2, d. h. $(1+x)$ und $(-x)$ nach Voraussetzung *positive* Zahlen sind (deren Summe übrigens gleich 1 ist), so sind in der Entwickelung von $(1-[(1+x)z-xz^2])^{-1}$ nach Potenzen von z, also auch in der Entwickelung von $(1-[(1+x)z-xz^2])^{-(\nu+1)}$ nach Potenzen von z, die Koeffizienten durchwegs *positiv*. Ich habe also das Resultat erhalten, daß

(8) $$\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\nu)}(x)\geqq 0$$

für

$$n=0, 1, 2, \ldots;\ -1<x<1.$$

(Genauer: für $n=0, 1, \ldots, (\nu-1)$ ist der Differentialquotient identisch gleich 0, für $n=\nu, (\nu+1), \ldots$ ist er positiv im ganzen

Intervalle $-1<x<1$.) Ist nun $\mu>\nu$, so ist, wegen (3), wieder

$$\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} s_n^{(\mu)}(x) \geqq 0$$

gültig. Ich habe also den folgenden Satz erhalten:

Ist μ eine nichtnegative ganze Zahl und bezeichnet $s_n^{(\mu)}(x)$ die Partialsumme μ-ter Ordnung vom Index n der geometrischen Reihe

$$1+x+x^2+\ldots x^n+\ldots,$$

so ist

$$\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} s_n^{(\mu)}(x) \geqq 0 \tag{9}$$

für

$$n=0, 1, 2, \ldots; \quad -1<x<1,$$

wenn

$$\nu=0, 1, 2, \ldots, \mu.$$

(Genauer: für $n=0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$ ist $\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} s_n^{(\mu)}(x) \equiv 0$, für $n=\nu, \nu+1, \nu+2, \ldots$ ist dieser Differentialquotient positiv im ganzen Intervalle $-1<x\leqq 1$.)

3. 1. Bemerkung. Da $S_n^{(\mu)}(x)=\dfrac{s_n^{(\mu)}(x)}{\binom{n+\mu}{\mu}}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, die Folge der Cesàroschen Mittelwerte μ-ter Ordnung der Partialsummen der geometrischen Reihe $1+x+x^2+\ldots$ repräsentiert, so ist auch für die Folge der ν-ten Derivierten dieser Cesàroschen Mittel die Ungleichung (9) gültig. Ich habe also erhalten, daß die Partialsummen der geometrischen Reihe für $-1<x<1$ positiv sind, daß ihre arithmetischen Mittelwerte erster Ordnung positiv und monoton wachsend sind für $-1<x<1$, daß ihre Mittelwerte zweiter Ordnung positiv, monoton wachsend und von unten konvex sind für $-1<x<1$, u. s. w. Je größer also die Ordnung μ des Cesàroschen Mittels $S_n^{(\mu)}(x)$ der geometrischen Reihe ist, umso mehr Differentialquotienten von $S_n'^{(\mu)}(x)$ sind positiv für $-1<x<1$. Die Differentialquotienten ihrer Grenzfunktion $\dfrac{1}{1-x}$ sind durchwegs positiv für $-1<x<1$.

2. Bemerkung. Die Entwickelung der erzeugenden Funktion

$$(10) \qquad \frac{\nu!}{(1-z)^{\nu+1}(1-xz)^{\nu+1}} = \frac{\nu!}{(1-[(1+x)z-xz^2])^{\nu+1}}$$

nach Potenzen von z (mit Hilfe der Binomialreihe $(1-u)^{-(\nu+1)}$) liefert einen interessanten Ausdruck für die Derivierten $\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_{\nu+n}^{(\nu)}(x)$. Sie erscheinen als Polynome der beiden Argumente $(-x)$ und $1+x$, (oder, indem wir $x=-\xi$ einführen, von ξ und $1-\xi$). Diese expliziten Ausdrücke sollen indessen hier übergangen werden, da ich sie in dieser Arbeit nicht benötige.

4. Es sei nun

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

zunächst eine beliebige Potenzreihe, deren Konvergenzradius *größer* als 1 ist. Da jetzt a_n mit unendlich wachsendem n so stark zu Null konvergiert, daß für $n \to \infty$ auch $n^p a_n \to 0$, wie groß auch die feste positive Zahl p sei, so liefert die $(k+1)$-fache Abelsche Umformung für $f(x)$ die Entwickelung[10])

$$(11) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(k+1)} a_n s_n^{(k)}(x).$$

Hier bezeichnet $\Delta^{(k+1)} a_n$ die *Differenz* $(k+1)$-ter Ordnung von a_n, während $s_n^{(k)}(x)$ die Partial*summe* k-ter Ordnung der geometrischen Reihe $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ bezeichnet. Für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von k enthält man eine solche Entwickelung (11) von $f(x)$. Wir haben die Funktion $f(x)$ nach den Partialsummen k-ter Ordnung $s_n^{(k)}(x)$ der geometrischen Reihe $1+x+x^2+\ldots$, d. h. nach den Polynomen

$$(12) \qquad s_n^{(k)}(x) = \binom{k+n}{k} + \binom{k+n-1}{k} x + \binom{k+n-2}{k} x^2 + \ldots + x^n$$

entwickelt, eine Entwicklung, die für $-1 \leqq x \leqq 1$ (ja sogar im Einheitskreise $|x| \leqq 1$ der komplexen x-Ebene) mit allen ihren Derivierten ebensowohl gleichmäßig konvergiert, wie die Potenz-

---

[10]) Gewöhnlich wird die umgekehrte Abelsche Umformung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(k+1)} x^n \,.\, s_n^{(k)} = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n$$

gebraucht, wo $s_n^{(k)}$ die Partialsumme k-ter Ordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Aus dieser Umformung ergeben sich die Potenzreihensätze von Abel, Frobenius, Hölder, Cesàro, u. s. w.

reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ selbst, mit allen ihren Derivierten. Es ist also für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von ν

$$(13) \qquad f^{(\nu)}(x) \equiv \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(k+1)} a_n \cdot \frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(k)}(x),$$

woraus, mit Rücksicht auf unser Lemma über die $s_n^{(k)}(x)$ der geometrischen Reihe, folgt, daß im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$

$$(14) \qquad \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} \geqq 0$$

ist für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$, wenn nur die Folge $\Delta^{(k+1)} a_n$ nichtnegativ ist.

5. Der allgemeine Fall läßt sich auf den soeben erledigten speziellen Fall reduzieren. Ist nähmlich $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine beliebige unendliche Folge, die $(k+1)$-fach monoton ist, d. h.

$$(15) \qquad \Delta^{(p)} a_n \geqq 0,$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots, (k+1); \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

dann ist bekanntlich auch die Folge $a_0, a_1 r, a_2 r^2, \ldots, a_n r^n, \ldots$ $(k+1)$-fach monoton, wenn r eine beliebige, aber feste positive Zahl des Intervalls $0 < r < 1$ bezeichnet. Also genügt

$$(16) \qquad f(rx) = a_0 + a_1 r . x + a_2 r^2 . x^2 + \ldots + a_n r^n . x^n + \ldots$$

den Bedingungen des Spezialfalles und es ist also

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(rx) = r^\nu f^{(\nu)}(rx) \geqq 0,$$

d. h.

$$f^{(\nu)}(rx) \geqq 0$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \; -1 \leqq x \leqq 1,$$

d. h.

$$f^{(\nu)}(x) \geqq 0$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \; -r \leqq x \leqq r.$$

Da aber die letzte Ungleichung für jede positive Zahl r gültig ist, die kleiner als 1 ist, so haben wir endlich

$$(17) \qquad f^{(\nu)}(x) \geqq 0$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \quad -1 < x < 1,$$

d. h. den Satz V erhalten.

6. Zweiter Beweis. Der erste Beweis zeigt, wie der Satz V mit einer elementaren Eigenschaft der Partialsummen höherer Ordnung der geometrischen Reihe *zusammenhängt*. Der zweite, hier folgende Beweis (der übrigens mit dem ersten verwandt ist,) ist kürzer (und hat sogar gewisse hier nicht zu erwähnende sachliche Vorteile).

Ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{18}$$

eine beliebige, für $-1 < x < 1$ konvergente Potenzreihe, so ist für diese Werte von x

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\, a_{n+k} x^n. \tag{19}$$

Da der Satz V für positive Werte von x trivial ist, so setze ich gleich $(-x)$ an Stelle von x, wo x die Ungleichung $0 < x < 1$ befriedigt. Es ist

$$f^{(k)}(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\, a_{n+k} x^n. \tag{20}$$

Bezeichnen wir nun mit $\sigma_n^{(k)}$ die Partialsummen k-ter Ordnung der numerischen unendlichen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\ldots(n+k) = \tag{21}$$
$$= 1.2\ldots k - 2.3\ldots(k+1) + \ldots,$$

so liefert eine $(k+1)$-fache Abelsche Umformung auf die rechte Seite von (20) angewendet:

$$f^{(k)}(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{(k+1)}(a_{n+k} x^n) \,.\, \sigma_n^{(k)}. \tag{22}$$

Ich zeige nun zunächst, daß die numerische Folge $\{\sigma_n^{(k)}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *nichtnegativ* ist. Setzen wir in (18) $a_0 = a_1 = = \ldots = a_n = \ldots = 1$, so liefert (20)

$$\frac{k!}{(1+x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\, x^n, \tag{23}$$

so daß also

$$(24)\qquad \frac{1}{(1-x)^{k+1}}\cdot\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}=\frac{k!}{(1-x^2)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(k)}x^n,$$

woraus sich die Nichtnegativität der Folge $\{\sigma_n^{(k)}\}$ unmittelbar ergibt.

Setzen wir nun voraus, daß die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $(k+1)$-fach monoton ist, so ist auch die Folge $\{a_{n+k}\}$, also bekanntlich auch die Folge $\{a_{n+k}x^n\}$ $(k+1)$-fach monoton. Also ist auch $\Delta^{(k+1)}(a_{n+k}x^n)\geqq 0$ für $n=0, 1, 2, \ldots$.

Auf Grund der Umformung (22) können wir also schließen, daß

$$f(x)\geqq 0,\ f'(x)\geqq 0, \ldots, f^{(k)}(x)\geqq 0 \text{ für } -1<x<0,$$

womit der Satz V von neuem bewiesen ist.

7. Der Satz V gestattet eine interessante Anwendung auf Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, deren Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *einfach* monoton d. h. nichtnegativ und monoton abnehmend ist. Ich gebrauche folgendes Lemma:

Ist die Folge $\{a_n\}$ einfach monoton, d. h. ist $a_n\geqq 0$, $a_n\geqq a_{n+1}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, so ist die Folge $\{a_nr^n\}$ k-fach monoton, wenn $0\leqq r\leqq \frac{1}{k}$.

Beweis. Es ist

$$(25)\qquad \begin{aligned}\Delta^{(\nu)}(a_nr^n)&=a_nr^n-\binom{\nu}{1}a_{n+1}r^{n+1}+\binom{\nu}{2}a_{n+2}r^{n+2}-\\&\quad-\ldots+(-1)^{\nu}a_{n+\nu}r^{n+\nu}=\\&=r^n\left\{a_n-\binom{\nu}{1}a_{n+1}r+\binom{\nu}{2}a_{n+2}r^2-\ldots+(-1)^{\nu}a_{n+\nu}r^{\nu}\right\}.\end{aligned}$$

Es sei nun r im Intervalle $0\leqq r\leqq\frac{1}{\nu}$ enthalten, d.h. $r=\frac{\theta}{\nu}$, wo θ eine feste Zahl mit $0\leqq\theta\leqq 1$ bezeichnet. Dann liefert (25)

$$\begin{aligned}\Delta^{(\nu)}(a_nr^n)=r^n\Bigg\{a_n&-\frac{\nu}{\nu}a_{n+1}\theta+\frac{1}{1.2}\,\frac{\nu(\nu-1)}{\nu.\nu}a_{n+2}\theta^2-\\&-\frac{1}{1.2.3}\,\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{\nu.\nu.\nu}a_{n+3}\theta^3+\\&+\ldots+(-1)^{\nu}\frac{1}{1.2\ldots\nu}\,\frac{\nu(\nu-1)\ldots1}{\nu.\nu\ldots\nu}a_{n+\nu}\theta^{\nu}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Da nun die $(\nu+1)$ Addenden in der Klammer dem absoluten

Beträge nach stets abnehmen, ferner abwechselnd positiv und negativ sind, so ist also tatsächlich $\Delta^{(\nu)}(a_n r^n) \geqq 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$; $0 \leqq r \leqq \frac{1}{\nu}$. Dieses Ergebnis für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$ angewendet liefert das Lemma.

Nun sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine beliebige Potenzreihe mit einfach monotoner Koeffizientenfolge. Bezeichnet dann r eine feste Zahl des Intervalles $0 < r < \frac{1}{k+1}$, so hat die Potenzreihe $f(rx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n . x^n$ nach unserem Lemma eine $(k+1)$-fach monotone Koeffizientenfolge $\{a_n r^n\}$. Nach dem Satze V ist aber dann

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(rx) = r^\nu f^{(\nu)}(rx) \geqq 0$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \; -1 < x < 1,$$

also ist

$$f^{(\nu)}(x) \geqq 0$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \; -\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k+1}.$$

Da, wegen der Nichtnegativität der Folge $\{a_n\}$, $f^{(\nu)}(x) \geqq 0$ ist für jedes ν und für das ganze Intervall $0 \leqq x < 1$, so haben wir also den folgenden Satz erhalten:

Satz VI. *Ist in der Potenzreihe*

(26) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

die Koeffizientenfolge nichtnegativ und monoton abnehmend, d. h. $a_n \geqq 0$, $a_n \geqq a_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *so ist für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von* k

(27) $$f^{(k)}(x) \geqq 0 \quad \textit{für} \quad -\frac{1}{k+1} < x < 1.$$

8. 1. Bemerkung. Wir sehen, daß die Summe einer Potenzreihe, deren Koeffizientenfolge einfach monoton ist, nichtnegativ ist im Intervalle $-1 < x < 1$, monoton wachsend ist im Intervalle $-\frac{1}{2} < x < 1$, von unten konvex ist im Intervalle $-\frac{1}{3} < x < 1$, u. s. w.

2. Bemerkung. Der Satz VI läßt sich in gewissem Sinne nicht verschärfen. Tatsächlich ist für die Potenzreihe

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + x^{k+1} + 0 . x^{k+2} + 0 . x^{k+3} + \dots$$
$$f^{(k)}(x) = k! + (k+1)! x = k! (1 + (k+1) x),$$

und $f^{(k)}(x)$ ist im ganzen Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{k+1}$ *negativ.*

3. Bemerkung. Wir haben soeben gesehen, daß eine Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, deren Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ einfach monoton ist, im ganzen Intervalle $-1 < x < 1$ positiv ist, und im Intervalle $-\frac{1}{2} < x < 1$ monoton wächst. Dieser Satz läßt zu, daß ein solches $f(x)$ im Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{2}$ beliebig viele Maxima und Minima habe. Ich habe ein Beispiel gefunden (übrigens ein Polynom 5-ten Grades), bei welchem $f(x)$ im Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ein Maximum und ein Minimum besitzt. Es ist mir aber nicht gelungen eine unendliche Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ mit nichtnegativen monoton abnehmenden Koeffizienten zu konstruieren, die im Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{2}$ *unendlich viele* Maximum- und Minimumstellen besäße (die natürlich den Punkt -1 zur Häufungsstelle haben müßten).

§. 2.

Über die Eigenschaften der Transformierten einer Potenzreihe mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.

1. Um eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten auf der reellen z-Achse von (-1) bis $(+1)$ zu untersuchen, haben wir die „transformierten Reihen"

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(\nu)} a_n . s_n^{(\nu-1)}(z), \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots) \tag{2}$$

eingeführt, wo $\{\Delta^{(\nu)} a_n\}$ die ν-te Differenzenfolge der Koeffizientenfolge $\{a_n\}$, $\{s_n^{(\nu-1)}(z)\}$ die $(\nu-1)$-te Summenfolge der geometrischen Reihe $1+z+z^2+\ldots$ darstellt. Wenn wir die Reihe (2), die ν-te *Transformierte* der Reihe (1), kurz durch $T_\nu(z)$ bezeichnen ($\nu=1,2,\ldots;\ T_0(z)=f(z)$), so lauten also die niedrigsten Transformierten ausführlicher:

$$\text{(I)}\quad T_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{n+1})(1+z+\ldots+z^n),$$

$$\text{(II)}\quad T_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})(n+1+nz+\ldots+z^n),$$

$$\text{(III)}\quad T_3(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-3a_{n+1}+3a_{n+2}-a_{n+3})\left(\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{2}z+\ldots+z^n\right),$$

$$\text{(IV)}\quad T_4(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-4a_{n+1}+6a_{n+2}-4a_{n+3}+a_{n+4})\left(\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}z+\ldots+z^n\right),$$

. . . .

Im §. 1 haben wir gesehen, daß die transformierten Reihen $T_\nu(z)$ durchwegs (mit allen ihren Derivierten) im Einheitskreise $|z|\leqq 1$ gleichmäßig konvergent sind und die Summe $f(z)$ haben, falls der Konvergenzradius der Potenzreihe (1) *größer ist als* 1.

Ich möchte hier nun den folgenden Satz erwähnen, dessen Beweis sich mit Hilfe der Formel für die k-fache Abelsche Umformung

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu u_\nu=\sum_{\nu=0}^{n-k}\Delta^{(k)}a_\nu\,.\,s_\nu^{(k-1)}+\sum_{\nu=n-k+1}^{n}\Delta^{(n-\nu)}a_\nu\,.\,s_\nu^{(n-\nu)},$$
$$(k=1,2,\ldots,n),$$

und mit Hilfe von Sätzen der Herren ANDERSEN und KNOPP **(7)** über die Ordnung des Unendlichkleinwerdens der höheren Differenzenfolgen einer mehrfach monotonen Zahlenfolge unschwer führen läßt.

Satz VII. *Ist die Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *der Potenzreihe* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ *k-fach monoton und ist* $\lim_{n=\infty}a_n=0$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ *mit ihren Transformierten* $T_1(z), T_2(z),\ldots, T_k(z)$ *für* $|z|<1$ *konvergent (für* $|z|\leqq\varrho<1$ *sogar gleichmäßig konvergent)* *und es ist*

(3) $$f(z) = T_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(\nu)} a_n \cdot s_n^{(\nu-1)}(z),$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, k; \ |z| < 1.$$

Allgemeiner: ist $\lim_{n=\infty} a_n = a$, *so ist*

(4) $$f(z) = \frac{a}{1-z} + T_\nu(z) = \frac{a}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(\nu)} a_n \cdot s_n^{(\nu-1)}(z),$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, k; \ |z| < 1.$$

2. Zunächst habe ich über die Transformierte $T_4(z)$ etwas besonderes zu sagen. Ich habe gezeigt (s. z. B. FEJÉR **2**), daß die hier auftretenden Partialsummen dritter Ordnung $s_n^{(3)}(z)$ der geometrischen Reihe

$$s_n^{(3)}(z) = \binom{n+3}{3} + \binom{n+2}{3} z + \ldots + z^n,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

nicht nur *schlicht* sind für $|z| \leqq 1$, sondern daß *ihr reeller Teil monoton abnimmt* $\left(\text{so wie der reelle Teil von } \frac{1}{1-z}\right)$, wenn z den oberen Halbkreis $z = re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi;\ r$ fest und $0 < r \leqq 1)$ mit wachsendem θ durchläuft. Ist nun überhaupt $\varphi_1(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion dieser Art mit reellen Koeffizienten (d. h. deren reeller Teil die soeben erwähnte Monotonitätseigenschaft besitzt, und die — wie leicht ersichtlich — infolgedessen für $|z| < 1$ schlicht ist), und $\varphi_2(z)$ eine zweite, so ist auch $\varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, folglich auch $c_1\varphi_1(z) + c_2\varphi_2(z)$ eine Funktion dieser Art, wenn $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ (es sei denn, daß $c_1\varphi_1(z) + c_2\varphi_2(z)$ identisch konstant ist). Aus der Tatsache, daß die Funktionen $\varphi(z)$ eine solche *Unterklasse* der für $|z| < 1$ regulären und schlichten Funktionen bilden, bei welcher die Summe von zwei Funktionen wieder zur Unterklasse selbst gehört, (wenn nur die Summe nicht identisch konstant ist) und aus dem über $s_n^{(3)}(z)$ Gesagten folgt dann auf Grund der Transformation für $\nu = 4$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{a}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(4)} a_n \cdot s_n^{(3)}(z),$$

daß die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < 1$ regulär und schlicht ist, wenn die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *vierfach* monoton ist. Dieser Satz ist mein alter Satz II, den ich in der Einleitung angeführt habe. Auf Grund des Vorhergehenden können wir nun auch den folgenden Satz formulieren:

Satz VIII. *Ist in der Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *die reelle Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *vierfach monoton, so ist die Potenzreihe für* $|z|<1$ *konvergent und schlicht. Weiter gilt für* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *die für* $|z|<1$ *konvergente (für* $|z|\leq\varrho<1$ *gleichmäßig konvergente) Entwickelung:*

$$(5)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{a}{1-z} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - 4a_{n+1} + 6a_{n+2} - 4a_{n+3} + a_{n+4}) \left(\binom{n+3}{3} + \right. \\ \left. + \binom{n+2}{3} z + \ldots + z^n \right),$$

die nach den Polynomen

$$s_n^{(3)}(z) = \binom{n+3}{3} + \binom{n+2}{3} z + \binom{n+1}{3} z^2 + \ldots + z^n,$$

den Partialsummen dritter Ordnung der geometrischen Reihe $1+z+\ldots+z^n+\ldots$, *fortschreitet. Hier ist* $a=\lim_{n=\infty} a_n$. *In der Entwickelung auf der rechten Seite der Gleichung* (5) *ist jedes einzelne Glied, jede Teilsumme (ja sogar jedes lineare Aggregat der Glieder mit nichtnegativen Koeffizienten) schlicht für* $|z|<1$. (Identisch konstante Aggregate werden natürlich ausgenommen.)

3. Ich führe hier ferner noch zwei interessante unveröffentlichte Resultate von Herrn EGERVÁRY an. Wir erwähnten soeben, daß das Polynom

$$(6)\quad s_n^{(3)}(z) = \binom{n+3}{3} + \binom{n+2}{3} z + \binom{n+1}{3} z^2 + \ldots + z^n \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

vom abgeschlossenen Einheitskreise $|z|\leq 1$ ein Bild auf die $w=s_n^{(3)}(z)$ Funktionsebene entwirft, das 1. *schlicht* ist, 2. daß die Abszisse des Bildpunktes von $z=re^{i\theta}$ *monoton abnimmt,* wenn (bei festen r, $0<r\leq 1$), θ von 0 bis π monoton wächst. Herr EGERVÁRY hat nun gefunden, 3. daß das von $|z|\leq 1$ durch $w=s_n^{(3)}(z)$ auf die Funktionsebene entworfene Bild *konvex* ist. Wir können also zum Satze VIII noch hinzufügen, daß die *einzelnen Glieder* in der Entwicklung (5) (und überhaupt in jeder Entwicklung (IV))

ein schlichtes und konvexes Bild vom Einheitskreise $|z| \leqq 1$ auf die Funktionsebene w entwerfen (natürlich vorausgesetzt, daß das Glied nicht identisch konstant ist). Weiter hat Herr EGERVÁRY bewiesen, daß die Polynome $s_n^{(1)}(z) = (n+1) + nz + \ldots + z^n$ der Entwicklung (II) *schlicht* sind für $|z| < 1$. Weitergehendere Schlüsse kann man aber vorläufig (auf Grund der transformierten Reihen) nicht ziehen; sind nämlich $f_1(z)$ und $f_2(z)$ regulär und konvex für $|z| < 1$, so braucht natürlich im allgemeinen $f_1(z) + f_2(z)$ nicht konvex zu sein für $|z| < 1$. Sind weiter $f_1(z)$ und $f_2(z)$ regulär und schlicht für $|z| < 1$, so wird natürlich im allgemeinen $f_1(z) + f_2(z)$ nicht schlicht sein für $|z| < 1$ (wohl aber, wenn die Funktionen f_1, f_2 zur soeben definierten Unterklasse φ gehören).

§. 3.

Sternförmigkeit, Konvexität.

1. Es sei

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit reellen[11]) Koeffizienten, deren Konvergenzradius größer als 1 ist.[12]) Es bezeichne weiter $u(\theta)$ und $v(\theta)$ die reelle bzw. imaginäre Komponente von $f(e^{i\theta})$, und $u'(\theta)$, $v'(\theta)$, $u''(\theta)$, $v''(\theta)$ mögen die ersten und zweiten Derivierten von $u(\theta)$ und $v(\theta)$ nach θ bezeichnen. Dann gelten die Formeln:

$$u(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta, \qquad v(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta, \tag{2}$$

$$|f(e^{i\theta})|^2 = u^2 + v^2 = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \tag{3}$$

mit

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu c_{\nu+n}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$u'(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin n\theta, \qquad v'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cos n\theta, \tag{4}$$

$$u''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n \cos n\theta, \quad v''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n \sin n\theta,$$

---

[11]) Die nun folgenden Formeln sind nicht komplizierter, wenn die c_ν komplex sind.

[12]) Bei der Ableitung der folgenden Sätze für Potenzreihen $f(z)$, die für $|z| < 1$ konvergieren, ist immer $f(rz)$ diejenige Potenzreihe, deren Konver-

(5) $$2(uv'-u'v)=B_0+2\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\theta,$$

mit

$$B_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+n)c_\nu c_{\nu+n};\quad n=0,1,2,\ldots,$$

(6) $$2(u'v''-u''v')=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos n\theta,$$

mit

$$C_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(\nu+n)(2\nu+n)c_\nu c_{\nu+n};\quad n=0,1,2,\ldots.$$

2. Es sei nun die Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ zweifach monoton. Dann ist (s. FEJÉR **2**) $v(\theta)$ positiv für $0<\theta<\pi$. Es sei $\{c_n\}$ vierfach monoton. Dann zeigt die Formel $A_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu c_{\nu+n}$, $n=0,1,2,\ldots$, mit einem Schlage, daß auch die Koeffizientenfolge $\{A_n\}$ der Kosinusreihe (3) vierfach monoton ist. *Also ist* (nach FEJÉR **2**) $|f(e^{i\theta})|^2=u^2+v^2$ *monoton abnehmend im Intervalle*[13]) $0\leqq\theta\leqq\pi$. Aus den beiden soeben erwähnten Tatsachen folgt wieder unmittelbar, daß $f(z)$ bei vierfach monotoner Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ schlicht ist für $|z|<1$.

3. Es sei nun die Folge $\{pc_p\}$, $p=1,2,3,\ldots$, zweifach monoton. Daraus folgt, daß auch die Folge $\{c_p\}$ zweifach monoton ist, also $v(\theta)>0$ für $0<\theta<\pi$. Wegen $(2\nu+n)c_\nu c_{\nu+n}=\nu c_\nu\,.\,(c_{\nu+n})+$ $+c_\nu((\nu+n)c_{\nu+n})$ folgt aber aus der Formel (5) mit einem Schlage, daß die Koeffizientenfolge $\{B_n\}$ der Kosinusreihe von $2(uv'-u'v)$ zweifach monoton ist. Also ist (siehe FEJÉR **2**) $uv'-u'v\geqq 0$ für jedes reelle θ. Aus beiden soeben erwähnten Tatsachen folgt leicht der Satz:

Satz IX. *Ist für die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ *die Folge* $\{nc_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$, *zweifach monoton, so ist sie für* $|z|<1$ *konvergent,*

genzradius größer als 1 ist; hier bezeichnet r eine positive Größe, die kleiner als 1 ist. Entscheidend ist, daß dann $\{c_nr^n\}$ k-fach monoton ist, wenn $\{c_n\}$ selbst es ist.

[13]) Bei Gelegenheit der Erwähnung einer neuen Eigenschaft der *Kreisbilder* einer Potenzreihe $c_0+c_1z+\ldots$, deren Koeffizienten mehrfach monoton sind, bemerke ich, daß auch die *Radienbilder* (d. h. die Bilder der Radien des Einheitskreises $|z|<1$) solcher Potenzreihen bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Hier spielen statt u, v, u', v', u'', v'' die Größen $u, v, \dot u, \dot v, \ddot u, \ddot v$ eine Rolle. Der Punkt bezeichnet eine Ableitung nach r.

schlicht und, i. B. auf den Nullpunkt der Funktionsebene, sternförmig.

Aus (6) folgt ähnlich:

Satz X. *Ist für die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *die Folge* $\{n^2 c_n\}$, $n=1,2,\ldots,$ *zweifach monoton, so ist sie für* $|z|<1$ *schlicht und entwirft vom Kreise* $|z|<1$ *ein konvexes Bild auf die Funktionsebene.*

§. 4.

Die Restenfolge.

1. Es sei

$$f(z)=c_0+c_1 z+\ldots=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit reellen Koefizienten, deren Konvergenzradius größer als 1 ist.

$$R_n(z)=c_n z^n+c_{n+1} z^{n+1}+\ldots=z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+n} z^\nu \tag{2}$$

bezeichne ihre n-te Restreihe. Für $f(z)$ gilt:

$$|f(e^{i\theta})|^2=A_0+2\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \cos\mu\theta, \tag{3}$$

mit

$$A_\mu=\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda c_{\lambda+\mu};\quad \mu=0,1,2,\ldots.$$

Indem wir die Formel (3) auf die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+n} z^\nu$ anwenden, erhalten wir für $|R_n(e^{i\theta})|^2$ die Kosinusreihe

$$|R_n(e^{i\theta})|^2=A_0^{(n)}+2\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(n)} \cos\mu\theta, \tag{4}$$

mit

$$A_\mu^{(n)}=\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+n} c_{\lambda+n+\mu};\quad \mu=0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

aus welcher

$$\begin{aligned}\Delta|R_n(e^{i\theta})|^2&=|R_n(e^{i\theta})|^2-|R_{n+1}(e^{i\theta})|^2=\\ &=A_0^{(n)}-A_0^{(n+1)}+2\sum_{\mu=1}^{\infty}(A_\mu^{(n)}-A_\mu^{(n+1)})\cos\mu\theta\end{aligned} \tag{6}$$

folgt. Da aber, nach (5),

$$(7)\quad A_\mu^{(n)} - A_\mu^{(n+1)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+n} c_{\lambda+n+\mu} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+n+1} c_{\lambda+n+\mu+1} = c_n c_{n+\mu},$$

so haben wir also aus der wichtigen Formel (3) in ungezwungener Weise die Entwickelung

$$(8)\qquad \Delta |R_n(e^{i\theta})|^2 = c_n^2 + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} c_n c_{n+\mu} \cos \mu\theta$$

erhalten, aus welcher (wie in FEJÉR—SZEGŐ **5** gezeigt ist) der folgende Satz leicht bewiesen werden kann:

Satz XI. *Ist in der Potenzreihe* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *die Koeffizientenfolge* $\{c_n\}$ $(k+1)$*-fach monoton, so ist sie für* $|z| < 1$ *konvergent; bezeichnen* $s_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *die gewöhnlichen Partialsummen der Potenzreihe, so ist die Folge*

$$(9)\quad |f(z)|^2,\ |f(z) - s_0(z)|^2,\ |f(z) - s_1(z)|^2, \ldots, |f(z) - s_n(z)|^2, \ldots$$

für den ganzen Einheitskreis[14] $|z| \leq 1$ *(mit eventueller Ausnahme der Stelle* $z = 1$*)* k*-fach*[15] *monoton.*

2. Betrachten wir speziell die Stelle $z = -1$. Wenn wir noch $\lim_{n=\infty} c_n = 0$ voraussetzen, so konvergiert die Reihe

$$(10)\qquad c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \ldots$$

und wir entnehmen aus dem allgemeinen Satz XI, daß die Folge der Reste der Reihe (10), auf das Quadrat erhoben, eine k-fach monotone Folge bildet, wenn die Folge $\{c_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $(k+1)$-fach monoton ist. Dieses Resultat rührt von den Herrn JACOBSTHAL **(6)** und KNOPP **(8)** her; sie zeigen für diesen speziellen Fall sogar noch mehr; z. B. daß schon die absoluten Beträge der Reste selbst eine k-fach monotone Folge bilden, wenn $\{c_n\}$ $(k+1)$-fach monoton ist.

Der Satz XI ist also in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des auf den Punkt $z = -1$ bezüglichen Jacobsthal—Knoppschen Satzes auf den vollen Einheitskreis.

---

[14]) Ist $z = e^{i\theta}$ eine Stelle des Einheitskreises, so verstehen wir unter $f(z) = f(e^{i\theta})$ den Limes $\lim_{r=1-0} f(re^{i\theta})$. Dieser existiert (mit eventueller Ausnahme der Stelle $z = 1$) für jede Stelle des Einheitskreises, wenn $\{c_n\}$ einfach monoton ist.

[15]) Für $k = 1$ (d. h. $k + 1 = 2$) geht dieser Satz in den in der Einleitung zitierten Satz von SZEGŐ über.

3. Es sei hier eine verwandte Frage berührt: Wie verhält sich der Rest $c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ zum ersten „vernachläßigten" Gliede $c_n z^n$? Ich möchte hier nur den Fall der totalmonotonen Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ behandeln. Da aus dem Hausdorffschen Satze

$$c_n z^n = \int_0^1 t^n z^n \, d\varphi(t), \tag{11}$$

$$R_n(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu = \int_0^1 \frac{t^n z^n}{1-tz} \, d\varphi(t) \tag{12}$$

folgt, so ist

$$\frac{R_n(z)}{c_n z^n} = \frac{\int_0^1 \frac{t^n}{1-tz} \, d\varphi(t)}{\int_0^1 t^n \, d\varphi(t)}, \tag{13}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots; \ |z| < 1, \ z \neq 0.$$

Es bewege sich nun z in der *linken Hälfte* des Einheitskreises $|z| < 1$, d. h. es sei $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 3\frac{\pi}{2}$. Hier ist $|1 - tz| \geqq 1$, da $0 \leqq t \leqq 1$. Also ist ebenda, nach (13),

$$\frac{|R_n(z)|}{|c_n z^n|} \leqq \frac{\int_0^1 t^n \, d\varphi(t)}{\int_0^1 t^n \, d\varphi(t)} = 1. \tag{14}$$

Wir haben also den folgenden Satz erhalten:

Satz XII. *Ist in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ totalmonoton, so ist in der „linken Hälfte" des Einheitskreises $\left(d.\ h.\ für\ z = re^{i\theta},\ 0 \leqq r < 1,\ \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 3\frac{\pi}{2}\right)$*

$$|c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots| \leqq |c_n z^n|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

§. 5.

Über die zur Potenzreihe gehörigen Legendrepolynome.

1. Ist

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots \tag{1}$$

eine beliebige Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, so führt die formale Cauchysche Multiplikation zu

$$(2)\qquad \begin{aligned}|f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta})f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n e^{ni\theta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n e^{-ni\theta} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\,.\,r^n,\end{aligned}$$

wo also

$$(3)\qquad \begin{aligned}P_n(\cos\theta) = \sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu e^{\nu i\theta}\,.\,\alpha_{n-\nu}e^{-(n-\nu)i\theta} = \\ = \sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu\alpha_{n-\nu}e^{(2\nu-n)i\theta} = \sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu\alpha_{n-\nu}\cos(n-2\nu)\theta = \\ = 2\alpha_0\alpha_n\cos n\theta + 2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\theta + 2\alpha_2\alpha_{n-2}\cos(n-4)\theta + \ldots\end{aligned}$$

Die durch die Formel

$$(4)\qquad \begin{aligned}P_n(\cos\theta) = 2\alpha_0\alpha_n\cos n\theta + \\ + 2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\theta + 2\alpha_2\alpha_{n-2}\cos(n-4)\theta + \ldots\end{aligned}$$

definierte unendliche Folge von Kosinuspolynomen[16] *nenne ich die zur Zahlenfolge*

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$$

gehörige Folge von Legendrepolynomen. Ich muß hinzufügen, daß in der Definitionsformel (4) *das letzte Glied* $2\alpha_m\alpha_{m+1}\cos\theta$ *ist, wenn* $n = 2m+1$, *und* α_m^2, *wenn* $n = 2m$ *ist.*

Hat die Potenzreihe (1) einen von Null verschiedenen Konvergenzradius R, so ist natürlich auch die Potenzreihe der nichtnegativen Veränderlichen r

$$(5)\qquad |f(re^{i\theta})|^2 = P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta)\,r + \ldots + P_n(\cos\theta)\,r^n + \ldots$$

für $0 \leqq r < R$ konvergent und stellt tatsächlich $|f(re^{i\theta})|^2$ dar[17].

---

[16]) Sind die α_n komplex, so sind die durch (2) definierten $P_n(\cos\theta)$ „gemischte" trigonometrische Polynome.

[17]) Ich stelle hier nebeneinander die *zwei* Entwicklungen von $|f(re^{i\theta})|^2$ für eine Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

die ich in dieser Arbeit benützt habe.

1. Entwicklung von $|f(re^{i\theta})|^2$ in eine *Kosinusreihe* nach dem Polarwinkel θ:

$$|f(re^{i\theta})|^2 = A_0(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty}A_n(r)\cos n\theta$$

mit

$$A_n(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu c_{\nu+n}\,r^{2\nu+n};\quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(Fortsetzung der Fussnote auf S. 112)

Ich habe die Polynome $P_n(\cos\theta)$ verallgemeinerte Legendresche Polynome, oder kurz Legendresche Polynome genannt, weil, wenn $f(z)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ ist, $P_n(\cos\theta)$ tatsächlich mit dem gewöhnlichen Legendreschen Polynom identisch ist. Ist $f(z)=(1-z)^{-\varrho}$, (ϱ beliebige reelle Zahl) so sind die $P_n^{(\varrho)}(\cos\theta)$ die s. g. *ultrasphärischen* Polynome (mit dem Parameter ϱ).

Da die Summe der Potenzreihe in r

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)\,.\,r+\ldots+P_n(\cos\theta)\,.\,r^n+\ldots$$

gleich $|f(re^{i\theta})|^2$ ist, so ist also ihre Summe immer nichtnegativ. Ich habe nun neuerdings bewiesen (FEJÉR 3), daß, wenn die Folge $\{\alpha_n\}$ *totalmonoton* ist, die „Koeffizientenreihe"

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

durchwegs nichtnegative Partialsummen *erster* Ordnung (also auch durchwegs nichtnegative arithmetische Mittel erster Ordnung) hat, für jeden reellen Wert von θ. Hier soll bewiesen werden, daß dieser Satz schon bei der *Monotonieordnung $k=2$ gültig ist.* Ich werde also beweisen den

Satz XIII. *Bezeichnet* $P_0(\cos\theta), P_1(\cos\theta), \ldots, P_n(\cos\theta), \ldots$ *die Folge der Legendreschen Polynome, die zur Zahlenfolge* α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *gehört, so sind die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Partialsummen der Reihe*

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots \tag{6}$$

durchwegs nichtnegativ für jeden reellen Wert von θ, *vorausgesetzt, daß die Folge* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *eine zweifach monotone Folge ist, d. h. daß sie nichtnegativ, monoton fallend, und von unten konvex ist*[18]).

---

2. Entwicklung von $|f(re^{i\theta})|^2$ in eine *Potenzreihe* nach den Potenzen des Radiusvectors r:

$$|f(re^{i\theta})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)r^n.$$

Hier sind $P_0(\cos\theta), P_1(\cos\theta), \ldots, P_n(\cos\theta), \ldots$ die zur Folge $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ gehörigen Legendrepolynome.

[18]) Daraus folgt, daß die Funktion $\dfrac{|f(re^{i\theta})|^2}{(1-r)^2}$ mit allen ihren Derivierten nach r nichtnegativ ist für $0\leq r<1$, falls die Koeffizientenfolge der Potenzreihe $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ zweifach monoton ist.

2. Beweis: Wir schreiben, zum leichteren Verständnis, zunächst die ersten Legendreschen Polynome ausführlich an, u. zw. jede nach fallenden Vielfachen von θ geordnet, d. h. so, wie sie sich aus der Formel (4) ergeben:

$$
\begin{aligned}
&P_0(\cos\theta)=\alpha_0^2\\
&P_1(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_1\cos\theta\\
(7)\qquad &P_2(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_2\cos 2\theta+\alpha_1^2\\
&P_3(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_3\cos 3\theta+2\alpha_1\alpha_2\cos\theta\\
&P_4(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_4\cos 4\theta+2\alpha_1\alpha_3\cos 2\theta+\alpha_2^2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Indem wir nun hier die erste Zeile mit $(n+1)$, die zweite mit n u. s. w., die $(n+1)$-te Zeile mit 1 multiplizieren und *kolonnenweise* addieren, so erhalten wir für die Partialsumme erster Ordnung und vom Index n der Reihe (6) die folgende Formel:

$$
(8)\qquad \sum_{\lambda=0}^{n}(n+1-\lambda)\,P_\lambda(\cos\theta)=
$$

$$
=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\alpha_\nu\sum_{\mu=0}^{n-2\nu}{}'\,((n-2\nu)+1-\mu)\,\alpha_{\nu+\mu}\cos\mu\theta.
$$

Hier habe ich zunächst zu erklären, was ich unter einer gestrichenen Summe $\sum'$ verstehe. $\sum\limits_{q=0}^{s}{}' u_q$ bezeichne einfach:

$$
\sum_{q=0}^{s}{}' u_q=u_0+2u_1+2u_2+\ldots+2u_s.
$$

Betrachten wir nun die gestrichene Summe auf der rechten Seite der Relation (8). Da in dieser n und ν fest sind, so werde ich kurz $n-2\nu=m$, $\alpha_{\nu+\mu}=\beta_\mu$ setzen. Dann erhält Σ' die Form:

$$
(9)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}{}'(m+1-\mu)\,\beta_\mu\cos\mu\theta=(m+1)\,\beta_0+m\beta_1\,.\,2\cos\theta+\ldots+
$$

$$
+1\,.\,\beta_m\,.\,2\cos m\theta.
$$

Da die Folge $\{\alpha_\mu\}$, $\mu=0,1,\ldots,$ zweifach monoton ist, so ist auch die Folge $\{\alpha_{\nu+\mu}\}$, $\mu=0,1,\ldots,$ d. h. die Folge $\{\beta_\mu\}$, $\mu=0,1,\ldots,$ zweifach monoton. Die endliche Zahlenfolge β_0, $\beta_1,\ldots,\beta_m$ ist also nichtnegativ, fallend und von unten konvex. Daraus folgt aber *nicht*, daß das Kosinuspolynom m-ter Ordnung

$$
(10)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}{}'\beta_\mu\cos\mu\theta
$$

nichtnegativ ist für jedes reelle θ. $\Big($Z. B.: ist $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_m = 1$,

so ist $\sum_{\mu=0}^{m}{}' \cos\mu\theta = \dfrac{\sin(2m+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\Big)$. Wohl aber ist das Polynom (9) nichtnegativ für jedes reelle θ. Da nämlich auch die endliche Folge $\{m+1-\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m$, nichtnegativ, fallend und von unten konvex (nichtkonkav) ist, so ist auch die Produktfolge $(m+1-\mu)\beta_\mu = \gamma_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m$, nichtnegativ, fallend und konvex von unten. Wir merken uns noch, daß, wegen $\gamma_{m-1} = 2\beta_{m-1}$ und $\gamma_m = \beta_m$, und mit Rücksicht auf $\beta_{m-1} \geqq \beta_m$, die Ungleichung

$$\gamma_{m-1} \geqq 2\gamma_m \tag{11}$$

stattfindet.

Da nun die Partialsumme erster Ordnung $s_n^{(1)}(\theta)$ der Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \cos\mu\theta$ den Wert $\left(\dfrac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$ hat, also nichtnegativ ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und für jedes reelle θ, und da weiter die zweifache Abelsche Umformung

$$\sum_{\mu=0}^{m}{}'(m+1-\mu)\beta_\mu \cos\mu\theta = \sum_{\mu=0}^{m}{}' \gamma_\mu \cos\mu\theta = \tag{12}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} (\Delta^2\gamma_k) \cdot s_k^{(1)}(\theta) + (\gamma_{m-1} - 2\gamma_m)\, s_{m-1}^{(1)}(\theta) + \gamma_m s_m^{(1)}(\theta)$$

liefert, so ist, mit besonderer Rücksicht auf die Ungleichung (11), $\sum_{\mu=0}^{m}{}'(m+1-\mu)\beta_\mu \cos\mu\theta$, und somit auch $\sum_{\lambda=0}^{n}(n+1-\lambda)P_\lambda(\cos\theta)$, für jedes θ, und für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ nichtnegativ, w. z. b. w.

Literaturverzeichnis.

1. J. W. Alexander, Functions Which Map the Interior of the Unit Circle upon Simple Regions, *Annals of Mathematics*, Second Series, **17** (1915—16), pp. 12—22.

2. L. Fejér, Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Transactions of the American Mathematical Society*, **39** (1936), pp. 18—59.

3. L. FEJÉR, Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendrepolynome, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **31** (1935), pp. 307—316.
4. L. FEJÉR, A hatványsorról és a vele kapcsolatos Legendre-féle többtaguakról, *Matematikai és Természettudományi Értesítő* (Budapest), **54** (1935), pp. 160—176.
5. L. FEJÉR und G. SZEGŐ, Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, **44** (1935).
6. E. JACOBSTHAL, Mittelwertbildung und Reihentransformation, *Mathematische Zeitschrift*, **6** (1920), pp. 100—117.
7. K. KNOPP, Mehrfach monotone Zahlenfolgen, *Mathematische Zeitschrift*, **22** (1925), pp. 75—85.
8. K. KNOPP, Mittelwertbildung und Reihentransformation, *Mathematische Zeitschrift*, **6** (1920), pp. 118—123.
9. G. PÓLYA, Application of a Theorem Connectod with the Problem of Moments, *Messenger of Mathematics*, **55** (1926), pp. 189—192.

(Eingegangen am 20. Mai 1936.)